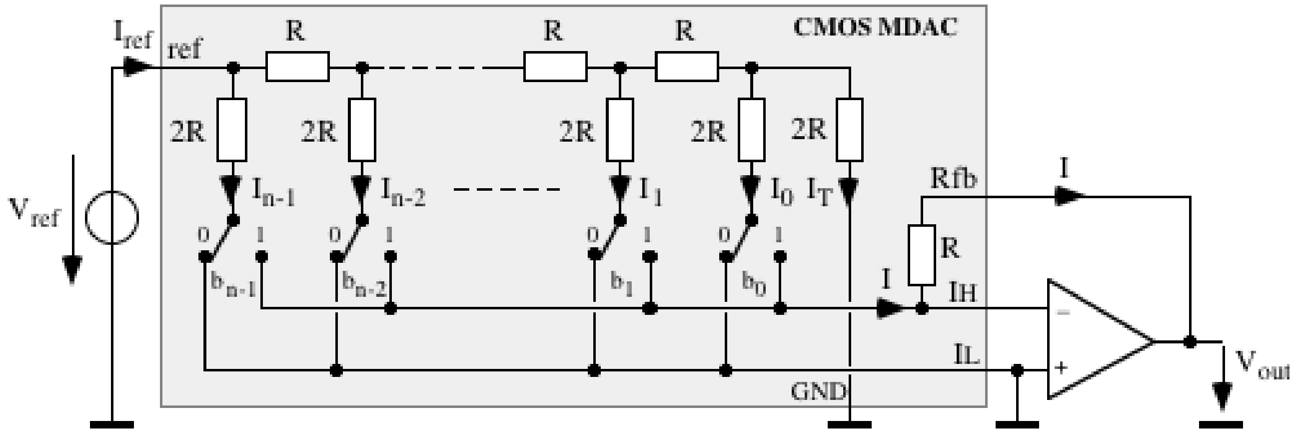
Exercice Convertisseurs NA

CMOS R-2R Multiplying n-bit DAC.

1. CNA unipolaire :

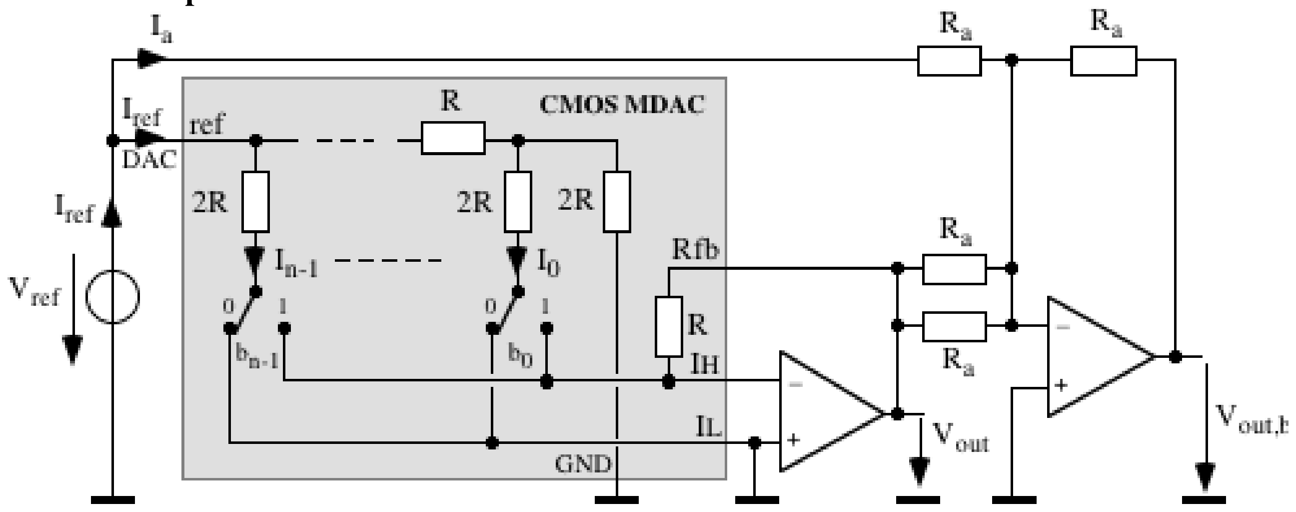


1a) Etablir la relation liant V_{out} à V_{ref} et au code binaire (b_{n-1}, ... b_1, b_0).

1b) Que vaut I_{ref} ?

1c) Quelle doit être la précision relative des résistances du réseau pour garantir la monotonicité du CNA ?

2. CNA bipolaire :



2a) Etablir la relation liant $V_{out,b}$ à V_{ref} et au code binaire (b_{n-1}, ... b_1, b_0).

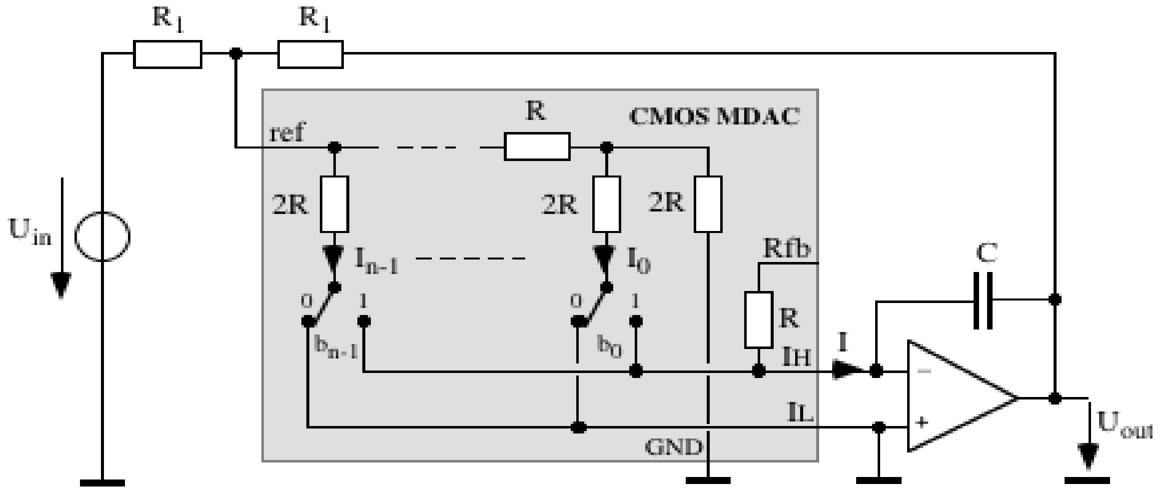
2b) Pour quel code binaire $V_{out,b}$ vaut exactement 0 V ?

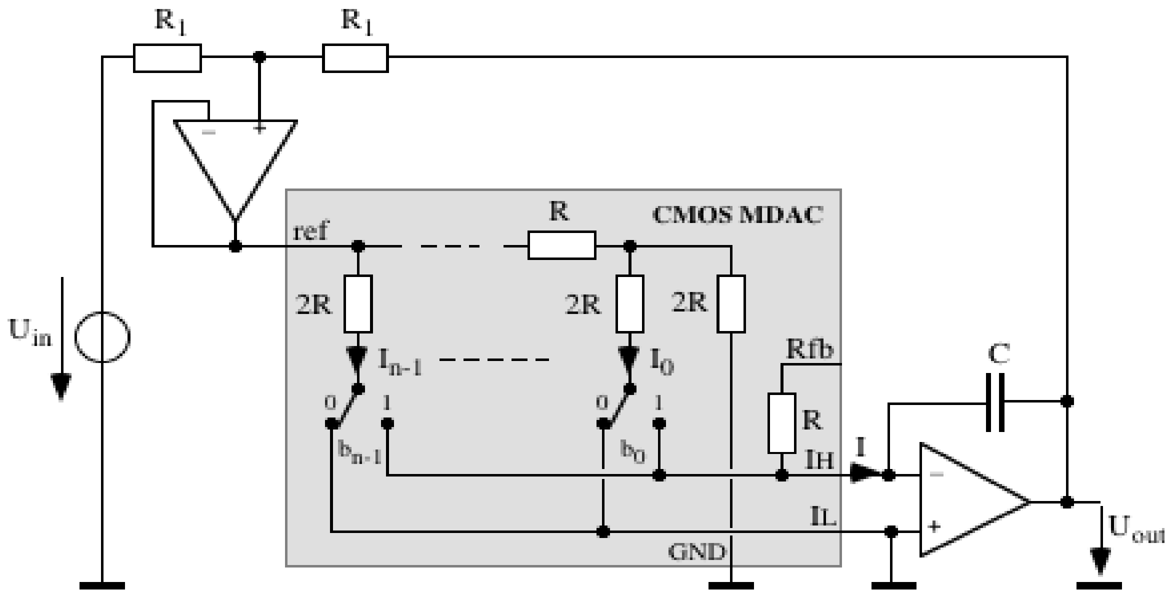
2c) Que vaut I_{ref} ?

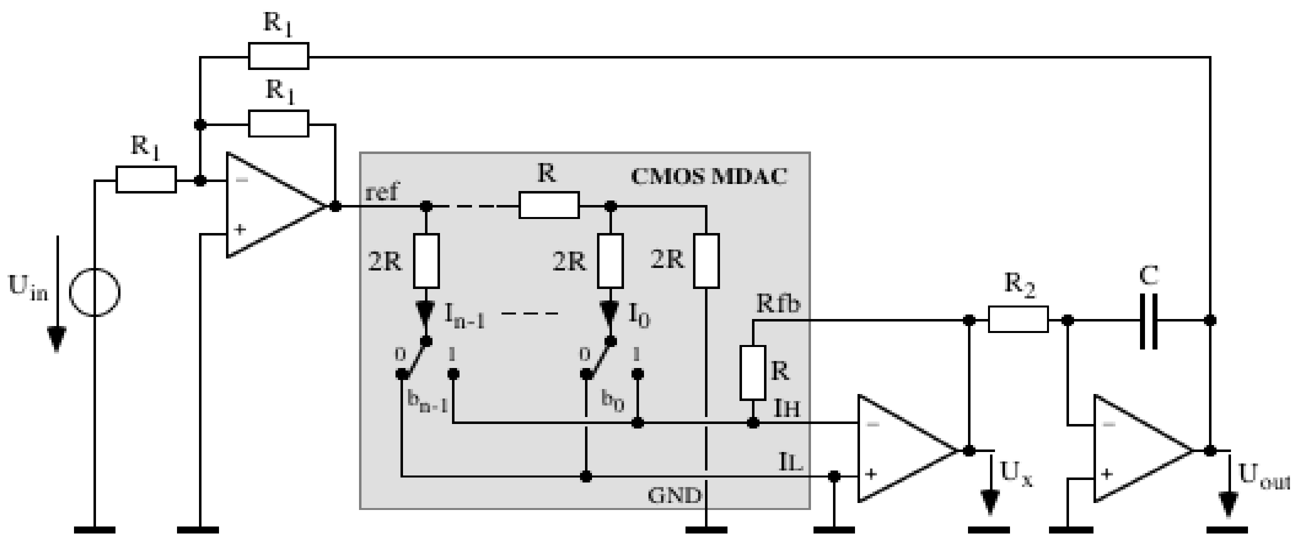
3. Filtres analogiques programmables numériquement.

Pour les trois circuits ci-après:

- Etablir la fonction de transfert U_{out}/U_{in} et montrer qu'il s'agit d'un filtre passe-bas du 1[er] ordre.
- Etablir la relation liant la fréquence de coupure au code binaire (b_{n-1}, ... b_1, b_0).
- Discuter des avantages et inconvénients relatifs des trois circuits.







1. CNA R-2R unipolaire

1a) Relation entre V_{out}, V_{ref} et le code $(b_{n-1}, \ldots, b_0)$

Propriété clé du réseau R-2R :

Vu depuis chaque point de prise de courant, l'impédance équivalente vers la droite du réseau vaut toujours $2R$.

Conséquence : les courants sont successivement divisés par 2 à chaque étage, ce qui permet le codage binaire.

Dans le schéma, chaque courant I_i (associé au bit b_i) est soit :

- injecté dans l'AOP si $b_i = 1$,
- dérivé à la masse si $b_i = 0$.

On peut donc écrire le courant total I qui entre dans la résistance de rétroaction :

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \, I_i$$

Pour un réseau R-2R idéal alimenté par V_{ref}, on obtient les courants suivants (on part du MSB vers le LSB) :

$$I_{n-1} = \frac{V_{\text{ref}}}{2R}$$

$$I_{n-2} = \frac{1}{2} \frac{V_{\text{ref}}}{2R}$$

$$\cdots$$

$$I_1 = \frac{1}{2^{n-2}} \frac{V_{\text{ref}}}{2R}, \quad I_0 = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{V_{\text{ref}}}{2R}$$

Le courant total est donc :

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} b_i I_i = b_{n-1} \frac{V_{\text{ref}}}{2R} + b_{n-2} \frac{1}{2} \frac{V_{\text{ref}}}{2R} + \cdots + b_1 \frac{1}{2^{n-2}} \frac{V_{\text{ref}}}{2R} + b_0 \frac{1}{2^{n-1}} \frac{V_{\text{ref}}}{2R}$$

L'AOP est configuré en **sommateur inverseur** avec $R_{\text{fb}} = R$, donc :

$$V_{\text{out}} = -R_{\text{fb}} \, I = -R \, I$$

En remplaçant I :

$$V_{\text{out}} = -R \left[b_{n-1} \frac{V_{\text{ref}}}{2R} + b_{n-2} \frac{1}{2} \frac{V_{\text{ref}}}{2R} + \cdots + b_1 \frac{1}{2^{n-2}} \frac{V_{\text{ref}}}{2R} + b_0 \frac{1}{2^{n-1}} \frac{V_{\text{ref}}}{2R} \right]$$

Le R se simplifie avec le $2R$ au dénominateur :

$$V_{\text{out}} = -V_{\text{ref}} \left[b_{n-1} \frac{1}{2} + b_{n-2} \frac{1}{4} + \cdots + b_1 \frac{1}{2^{n-1}} + b_0 \frac{1}{2^n} \right]$$

On met tout sur un dénominateur commun 2^n :

$$V_{\text{out}} = -\frac{V_{\text{ref}}}{2^n} \left[b_{n-1} 2^{n-1} + b_{n-2} 2^{n-2} + \cdots + b_1 2^1 + b_0 2^0 \right]$$

Le terme entre crochets est simplement la valeur entière N du code binaire $(b_{n-1}, \ldots, b_0)$

Résultat :

$$\boxed{V_{\text{out}} = -\frac{V_{\text{ref}}}{2^n} \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i}$$

1b) Valeur de I_{ref}

I_{ref} est le courant qui arrive dans la première résistance $2R$ du réseau (celle connectée directement à V_{ref} sur la figure). Il se partage ensuite entre :

- les différents courants de bit $I_{n-1}, I_{n-2}, \ldots, I_0$,
- un courant de terminaison I_T dans la dernière branche.

On a donc :

$$I_{\text{ref}} = I_{n-1} + I_{n-2} + \cdots + I_0 + I_T$$

En remplaçant par les valeurs en fonction de V_{ref} :

$$I_{\text{ref}} = \frac{V_{\text{ref}}}{2R}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

Les n courants de bit forment la somme

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

et le courant de terminaison ajoute un terme supplémentaire $\frac{1}{2^{n-1}}$.

Donc :

$$I_{\text{ref}} = \frac{V_{\text{ref}}}{2R}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

La somme géométrique

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

En ajoutant le dernier $\frac{1}{2^{n-1}}$, on obtient exactement 2.

On peut donc simplifier directement : $\Rightarrow I_{\text{ref}} = \dfrac{V_{\text{ref}}}{R}$

Résultat : $\boxed{I_{\text{ref}} = \dfrac{V_{\text{ref}}}{R}}$

1c) Précision relative des résistances pour assurer la monotonie

Monotonie :
Un CNA est monotone si, lorsque le code binaire augmente d'une unité, la tension de sortie augmente toujours (ou au moins ne diminue jamais). Autrement dit, il ne doit jamais y avoir de code manquant ni de décroissance de V_{out} quand le code croît.
Le cas **le plus critique** est le passage :

$$011\ldots111 \quad\longrightarrow\quad 100\ldots000$$

- Avant : tous les bits de poids faible sont à 1, sauf le MSB $b_{n-1} = 0$.
- Après : seul le MSB est à 1, tous les autres à 0.

Idéalement, le courant associé au MSB doit être **au moins égal** à la somme de tous les autres courants, pour que la sortie augmente lors de cette transition.

Effet d'une erreur relative e

On suppose un écart relatif maximum e sur les résistances :

- la première résistance $2R$ (celle connectée à V_{ref}) est **trop grande** : $2R(1+e)$
- toutes les autres résistances R et 2R sont **trop petites** : $R(1-e)$, $2R(1-e)$

C'est le cas le plus défavorable pour la monotonie, car :

- I_{n-1} (bit de poids fort) devient plus petit,
- les courants des autres bits deviennent plus grands (pour un même V_{ref}).

Le courant du MSB vaut alors :

$$I_{n-1} = \frac{V_{\text{ref}}}{2R(1+e)}$$

La somme des autres courants (bits de poids plus faible) vaut :

$$I_{n-2} + \cdots + I_0 = \frac{V_{\text{ref}}}{2R(1-e)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \right)$$

La somme $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$ est une série géométrique :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$$

Donc :

$$I_{n-2} + \cdots + I_0 = \frac{V_{\text{ref}}}{2R(1-e)} \cdot \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$$

Pour rester monotone, il faut :

$$I_{n-1} \geq I_{n-2} + \cdots + I_0 \;\; \Rightarrow \frac{V_{\text{ref}}}{2R(1+e)} \geq \frac{V_{\text{ref}}}{2R(1-e)} \cdot \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$$

On simplifie $V_{\text{ref}}/(2R)$ des deux côtés :

$$\frac{1}{1+e} \geq \frac{1}{1-e} \cdot \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \quad \Rightarrow \frac{1-e}{1+e} \geq \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$$

Après simplifications on obtient finalement :

$$e \leq \frac{1}{2^n - 1} \approx \frac{1}{2^n}$$

Interprétation : les résistances du réseau R-2R doivent être appariées avec une précision relative meilleure que environ $1/2^n$ pour garantir la monotonie sur toute la plage de codes.

2. CNA R-2R bipolaire

Sur la *figure* , un deuxième AOP et un réseau de résistances R_a transforment le CNA unipolaire en CNA **bipolaire**, c'est-à-dire dont la sortie varie autour de 0 V.
On utilise le CNA unipolaire pour générer une tension intermédiaire, puis un sommateur inverseur pour effectuer un **décalage** (offset) et une **mise à l'échelle** de cette tension.

2a) Relation entre $V_{\text{out,b}}$, V_{ref} et le code

On rappelle le résultat du CNA unipolaire : $V_{\text{out}} = -\dfrac{V_{\text{ref}}}{2^n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$

Le second AOP est câblé en **sommateur inverseur**: $V_{\text{out,b}} = -V_{\text{ref}} - 2V_{\text{out}}$

(Le facteur 2 vient du choix des résistances dans le sommateur.)

On remplace V_{out} par son expression :

$$V_{\text{out,b}} = -V_{\text{ref}} - 2\left(-\frac{V_{\text{ref}}}{2^n}\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i\right)$$

$$V_{\text{out,b}} = -V_{\text{ref}} + \frac{2V_{\text{ref}}}{2^n}\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i = -V_{\text{ref}} + \frac{V_{\text{ref}}}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$

On met $\dfrac{V_{\text{ref}}}{2^{n-1}}$ en facteur :

$$V_{\text{out,b}} = \frac{V_{\text{ref}}}{2^{n-1}}\left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i - 2^{n-1}\right)$$

Résultat :

$$\boxed{V_{\text{out,b}} = \frac{V_{\text{ref}}}{2^{n-1}}\left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i - 2^{n-1}\right)}$$

2b) Code pour lequel $V_{\text{out,b}} = 0$

On pose $V_{\text{out,b}} = 0$ dans l'expression précédente :

$$0 = \frac{V_{\text{ref}}}{2^{n-1}}\left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i - 2^{n-1}\right)$$

Comme $V_{\text{ref}}/2^{n-1} \neq 0$, on doit avoir :

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i = 2^{n-1}$$

C'est exactement le code binaire : $100\ldots0$ (1 pour le bit de poids fort, tous les autres à 0).

Donc : $\boxed{V_{\text{out,b}} = 0 \text{ pour le code } 100\ldots000}$

On vérifie aussi les extrémités :

- Code $000\ldots000$: somme = 0

$$V_{\text{out,b}} = \frac{V_{\text{ref}}}{2^{n-1}}(0 - 2^{n-1}) = -V_{\text{ref}}$$

- Code $111\ldots111$: somme = $2^n - 1$

$$V_{\text{out,b}} = \frac{V_{\text{ref}}}{2^{n-1}}\left(2^n - 1 - 2^{n-1}\right) = V_{\text{ref}}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \approx V_{\text{ref}}$$

2c) Calcul de I_{ref} dans le CNA bipolaire

Dans ce montage, la référence de courant globale alimente :

- le réseau R-2R du DAC (comme dans le cas unipolaire),
- un courant supplémentaire I_a injecté via la résistance R_a (voir schéma).

$$I_{\mathrm{ref}} = I_{\mathrm{ref,DAC}} + I_a$$

Or on a déjà vu (1b) que, pour le réseau R-2R du DAC : $I_{\mathrm{ref,DAC}} = \dfrac{V_{\mathrm{ref}}}{R}$

D'autre part, le courant dans R_a vaut : $I_a = \dfrac{V_{\mathrm{ref}}}{R_a}$

D'où : $\boxed{I_{\mathrm{ref}} = \dfrac{V_{\mathrm{ref}}}{R} + \dfrac{V_{\mathrm{ref}}}{R_a}}$

3. Filtres analogiques programmables numériquement

les trois circuits associent :

- un MDAC R-2R (CMOS MDAC),
- un ou plusieurs AOP,
- un condensateur C,

de façon à réaliser un **filtre passe-bas du 1er ordre** dont la fréquence de coupure dépend du code binaire $(b_{n-1}, \ldots, b_0)$.

Idée générale :

Le CNA fonctionne ici comme un **transconducteur programmable** : il transforme la tension U_{ref} en un courant I proportionnel au code numérique. Ce courant est ensuite intégré (ou filtré) par un AOP + condensateur.

3.1 Premier circuit : un seul amplificateur opérationnel

a) Tension U_{ref}

Vu depuis la borne ref du DAC, le réseau R-2R se comporte comme une **résistance équivalente R** reliée à la masse (résultat classique pour ce type de MDAC).

Cette résistance est en parallèle avec une résistance R_1 (vers U_{out}), ce qui donne une résistance équivalente $R \parallel R_1$

Le nœud ref forme donc un pont entre :

- U_{in} via R_1,
- U_{out} via R_1,
- la masse via $R \parallel R_1$

En écrivant les équations du diviseur, on obtient la relation :

$$U_{\mathrm{ref}} = \frac{R \parallel R_1}{(R \parallel R_1) + R_1} U_{\mathrm{in}} + \frac{R \parallel R_1}{(R \parallel R_1) + R_1} U_{\mathrm{out}}$$

On pose : $U_{\mathrm{ref}} = k\, U_{\mathrm{in}} + k\, U_{\mathrm{out}}$ avec $k = \dfrac{R \parallel R_1}{(R \parallel R_1) + R_1}$

En développant $R \parallel R_1 = \dfrac{RR_1}{R + R_1}$ et en simplifiant on arrive à : $k = \dfrac{R}{2R + R_1}$

b) Courant fourni par le DAC

Dans le mode unipolaire, le DAC donne un courant :

$$I = \frac{U_{\text{ref}}}{R}\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$ (identique à la formule de 1a mais avec U_{ref} à la place de V_{ref}).

c) AOP intégrateur

L'AOP de sortie est câblé en **intégrateur inverseur** :

$$U_{\text{out}} = -\frac{1}{j\omega C} I$$

En combinant avec l'expression de I : $U_{\text{out}} = -\frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{U_{\text{ref}}}{R2^n}\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$

Puis avec $U_{\text{ref}} = k(U_{\text{in}} + U_{\text{out}})$:

$$U_{\text{out}} = -\frac{1}{j\omega C} \cdot \frac{k(U_{\text{in}} + U_{\text{out}})}{R2^n}\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$

On pose $B = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$. On obtient :

$$U_{\text{out}}\left(1 + \frac{kB}{j\omega RC2^n}\right) = U_{\text{in}}\left(-\frac{kB}{j\omega RC2^n}\right)$$

La fonction de transfert est donc :

$$H(j\omega) = \frac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}} = \frac{-1}{1 + \frac{j\omega RC2^n}{kB}} = \frac{-1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

avec

$$\boxed{\omega_c = \frac{k}{RC2^n}\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i}$$

C'est bien un **passe-bas du 1er ordre** (forme standard $H(j\omega) = \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_c}$ avec $G_0 = -1$).

Cas particulier $R_1 = R$: Alors $k = \frac{R}{2R + R_1} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$. On a : $\omega_c = \frac{1}{3RC2^n}\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$

3.2 Deuxième circuit : deux AOP

Le premier AOP forme un sommateur (ou amplificateur) qui établit :

$$U_{\text{ref}} = \frac{R_1}{R_1 + R_1}U_{\text{in}} + \frac{R_1}{R_1 + R_1}U_{\text{out}} = \frac{1}{2}(U_{\text{in}} + U_{\text{out}})$$

On retrouve la même structure que précédemment mais avec : $k = \frac{1}{2}$

Le reste du calcul est strictement identique au premier cas : même formule pour I et pour l'intégrateur.
On obtient donc la même forme de fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}} = \frac{-1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

avec maintenant : $$\boxed{\omega_c = \frac{1}{2RC2^n}\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i}$$

Remarque : ici, R_1 peut être choisi **indépendamment** de R, ce qui facilite la conception (on n'a pas besoin de ratios précis entre les résistances du filtre et celles du réseau R-2R).

3.3 Troisième circuit : trois AOP

Ici la structure est un peu différente :

1. Un AOP sommateur inverseur réalise : $U_{\text{ref}} = -U_{\text{in}} - U_{\text{out}}$
2. Le DAC unipolaire fournit une tension U_x à partir de U_{ref} : $U_x = -\frac{U_{\text{ref}}}{2^n}\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$
3. Un AOP intégrateur inverseur avec R_2 et C donne : $U_{\text{out}} = -\frac{1}{j\omega R_2 C} U_x$

En combinant : $U_{\text{out}} = -\frac{1}{j\omega R_2 C}\left(-\frac{U_{\text{ref}}}{2^n}B\right) = \frac{B}{j\omega R_2 C 2^n} U_{\text{ref}}$ avec $B = \sum b_i 2^i$.

Et comme $U_{\text{ref}} = -U_{\text{in}} - U_{\text{out}}$:

$$U_{\text{out}} = \frac{B}{j\omega R_2 C 2^n}(-U_{\text{in}} - U_{\text{out}})$$

$$U_{\text{out}}\left(1 + \frac{B}{j\omega R_2 C 2^n}\right) = -\frac{B}{j\omega R_2 C 2^n} U_{\text{in}}$$

La fonction de transfert est donc : $H(j\omega) = \frac{U_{\text{out}}}{U_{\text{in}}} = \frac{-1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$

avec : $\boxed{\omega_c = \frac{1}{R_2 C 2^n}\sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i}$

Point important :

La pulsation de coupure **ne dépend pas** de la valeur absolue du réseau R-2R du CNA, uniquement de R_2, C et du code.

3.4 Discussion : avantages / inconvénients des trois circuits

1. **Premier circuit (un seul AOP)**
   - **Avantages :**
     - Architecture la plus simple : un seul amplificateur opérationnel.
     - Moins de consommation et de bruit ajouté par les AOP.
   - **Inconvénients :**
     - La fréquence de coupure dépend à la fois de R et de R_1 via $k = \frac{R}{2R + R_1}$.
     - Nécessité d'un bon appariement entre R, R_1 et les résistances du réseau R-2R pour une bonne précision.
2. **Deuxième circuit (deux AOP)**
   - **Avantages :**
     - Expression plus simple de k ($k = 1/2$).
     - R_1 peut être choisi indépendamment de R : on peut ajuster les valeurs autour du DAC sans perturber le réseau R-2R interne.
   - **Inconvénients :**
     - Un AOP de plus ⇒ complexité, consommation, bruit et décalages (offsets) supplémentaires.

3. **Troisième circuit (trois AOP)**
   - **Avantages :**
     - La pulsation de coupure ω_c ne dépend plus du réseau R-2R, seulement de R_2, C et du code.
     - Permet d'utiliser un CNA dont les résistances internes ne sont pas précisément connues en valeur absolue (seule la linéarité relative compte).
   - **Inconvénients :**
     - Encore plus d'AOP : complexité maximale, risque accru d'erreurs d'offset, de limitations en bande passante, etc.

En résumé, il y a un compromis entre **simplicité matérielle** (1 AOP) et **indépendance vis-à-vis des résistances du DAC** (3 AOP). Le choix du circuit dépend des contraintes de précision, de consommation et de coût.

ANNEX

Somme d'une suite géométrique finie

On considère la somme partielle :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a\,q^k = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a\,q^k = a\,\frac{1-q^n}{1-q}}$$

1. **Somme de puissances de 2**

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}$$

c'est $a = 1$, $q = 2$, donc : $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1}$

2. **Somme** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

c'est $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$, donc : $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}$

3. **Somme décalée, par exemple** $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$

On peut l'écrire : $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1$

On utilise la formule précédente et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - 1 = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}}$$